Жоғары ретті туындылар мен дифференциалдар. Лейбниц формуласы.

Жоғары ретті туындылар. f функцияның (a,b) аралығында туындысы бар болса, онда $f'(x)$ белгілі функция болады. Өз кезегінде бірінші туындының да (a,b) аралығында туындысы болуы мүмкін. Бұл жағдайда оны f функциясының **екінші ретті туындысы** дейді және $f''(x)=\left(f'(x)\right)'$ немесе $y''=(y')'$ арқылы белгілейді.

Жалпы f - тің $(n-1)$ ретті туындысының туындысы f функцияның n **- ші ретті туындысы** деп атайды да

$$f^{(n)}(x)=\left(f^{(n-1)}(x)\right)' \text{ немесе } y^{(n)}=\left(y^{(n-1)}\right)'$$

деп белгілейді. n - рет дифференциалданатын $u(x)$ және $v(x)$ функцияларының қосындысы мен көбейтіндісі үшін келесі дифференциалдау ережесі орындалады:

1. $(u+v)^{(n)}=u^{(n)}+v^{(n)}$;

Лейбниц формуласы:

$$(u\cdot v)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}=u^{(n)}\cdot v+C_n^1u^{(n-1)}v'+...+C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}+...+u\cdot v^{(n)}$$

мұнда $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, $0!=1!=1$. Бұл теңдіктерді математикалық индукция әдісін пайдаланып дәлелдеуге болады.

Жоғары ретті дифференциал. f(x) (a,b) аралығында n -рет дифференциалданатын функция, x -тәуелсіз айнымалы. Онда f функциясының x нүктесіндегі $dy=f'(x)dx$ **бірінші дифференциалынан** алынған дифференциал f функциясының **екінші дифференциалы** деп аталады да $d^2y=d(dy)$ арқылы белгіленеді, және $d^2y=d(dy)=d[f'(x)dx]=$

$$=dx\cdot d[f'(x)]=dx\cdot f''(x)dx=f''(x)dx^2$$ тең $(dx-const)$

$y=f(x)$ функциясының n **- ретті дифференциалы** деп f функциясының $(n-1)$ - ретті дифференциалының дифференциалын айтады және оны келесі түрде белгілейді.

$$d^ny=d(d^{n-1}y).$$

n – ші ретті дифференциал үшін

$$d^ny=f^{(n)}(x)dx^n,$$

теңдігі орындалады. n – ші ретті дифференциалдар үшін келесі ережелер орындалады:

1) $d^n(u+v)=d^nu+d^nv$;

2) $d^n(u\cdot v)=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k d^{n-k}u\cdot d^kv.$

12 -Дәріс

<u>Тақырыбы</u>: Лопиталь ережесі. Тейлор формуласы. Маклорен формуласы, негізгі элементар функциялардың жіктелуі.

$f(x)$ функциясы X аралығында анықталып, $x_0 \in X$ нүктесінде $f(x_0), f'(x_0), ..., f^{(n)}(x_0)$ туындылары бар болсын. $f(x)$ функциясын жуықтау құралы ретінде сәйкес туындылары $f(x)$ функциясының x_0 нүктесіндегі туындыларымен беттесетін n дәрежелі көпмүшелікті, яғни

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x)}{11}(x - x_0) + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

көпмүшелігін алайық. Ол $f(x)$ функциясының x_0 нүктесіндегі Тейлор көпмүшелігі деп аталады.

Егер $f(x)$ функциясы n дәрежелі көпмүшелік болса, онда әрбір $x_0 \in (-\infty, +\infty)$ үшін $f(x) = P_n(x)$

Басқа жағдайларда ондай теңдік орындалмауы мүмкін, демек *қателік* немесе *қалдық мүше* деп аталатын

$$R_{n+1}(x; f) = f(x) - P_n(x)$$

функциясын қарауымыз қажетті.

$R_{n+1}(x; f)$ функциясының анықтамасынан шығатын

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{11}(x - x_0) + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_{n+1}(x; f)$$

формуласын Тейлор формуласы деп атайды.

$x_0 = 0$ болғанда, Тейлор формуласы мына түрге келеді:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

Кейбір негізгі элементтар функциялардың Тейлор формуласымен жіктелуі:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}, 0 < \theta < 1.$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\cos\theta x.$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-2}}{(2k-2)!} + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}\cos\theta x.$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\frac{1}{1+\theta x}\right)^{n+1}$$

$$(1+x)^\mu = 1 + \mu x + \frac{\mu(\mu-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{\mu(\mu-1)...(\mu-n+1)}{n!}x^n + \frac{\mu(\mu-1)...(\mu-n)(1+\theta x)^{\mu-n-1}}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Тейлор формуласын жуықтап есептеуге қолданады.

Мысалы, е санын 0,001 дәлдігімен есептеу керек.

$f(x)=e^x$, $f^{(n)}(x)=e^x$

Тейлор формуласында $x=1$ тең деп аламыз,

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^c$$

$$e^x=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{n!}+\frac{e^c}{(n+1)!}$$

$0<c<1$, онда $e^c<3$ және қалдық мүше $\frac{e^c}{(n+1)!}$<0.001, $n=6$деп алсақ, онда

$$\frac{e^c}{7!}<\frac{3}{5040}<0.001.$$

Сонымен,

$$e\approx 1+1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}\approx 2{,}718$$

Лопиталь ережесі.

Теорема $f(x)$ пен $g(x)$ $x=a$ нүктесінің маңайында (a – нүктесі алынып тасталуы да мүмкін) анықталған, дифференциалданатын және $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$ (немесе $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$), a – нүктесінің маңайында $g(x)\neq 0$, $g'(x)\neq 0$, шарттары орындалатын функциялар болсын. Онда егер $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ шегі бар болса, онда $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ шегі де бар және

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

теңдігі орындалады.

Егер $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ өрнегі де $\left(\frac{0}{0}\right)$түріндегі анықталмағандық болып $f'(x)$, $g'(x)$ функциялары теорема шартын қанағаттандырса, онда

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

$0\cdot\infty$, $0^{0,}$ ∞^0, $\infty-\infty$, 1^∞ түріндегі анықталмағандықтар алгебралық түрлендірулер арқылы $\frac{0}{0}$ немесе $\frac{\infty}{\infty}$ анықталмағандығына келтіріледі.

а) $0\cdot\infty$ анықталмағандығын

$\left(f(x)\cdot g(x),\ \mathrm{f(x)}\to 0, \mathrm{g(x)}\to\infty, \mathrm{x}\to a\ \right)$ $f(x)\cdot g(x)=\dfrac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}$ түрлендіруі $\left(\dfrac{0}{0}\right)$, ал $f(x)\cdot g(x)=\dfrac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}$ түрлендіруі $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ түріне әкеледі.

б) $1^{\infty},\ 0^{0},\ \ \infty^{0}\ \left(f(x)^{g(x)}\right)$ анықталмағандықтарын түрлендірулер арқылы $0\cdot\infty$ түріне a - жағдайына келтіруге болады.

в) $\infty-\infty\ \ (f(x)-g(x),\ \ \mathrm{f}\to+\infty,\ \ \mathrm{g}\to+\infty\ \ (x\to a))$ анықталмағандығын $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ түріне келтіруге болады.

4 МОДУЛЬ. Функцияларды туынды көмегімен зерттеу.

13 -Дәріс

<u>Тақырыбы</u>: **Функцияларды зерттеу дифференциалдық есептеудің қолданылуы. Функцияның тұрақты болу және монотонды болу шарттары. Функция экстремумы. Экстремум бар болуының қажетті және жеткілікті шарттары.**

Туындылардың көмегімен функцияларды зерттеу. Функциялардың локальді экстремумі

Анықтама. Егер x_0 нүктесінің белгілі бір δ - маңайында:

$$f(x)\le f(x_0),\ \forall x\in\left(x_0-\delta, x_0+\delta\right) \tag{1}$$

$$(\text{сәйкес}\quad f(x)\ge f(x_0),\ \forall x\in\left(x_0-\delta, x_0+\delta\right)). \tag{2}$$

теңсіздіктері орындалса, онда x_0-ді $f(x)$ функциясының локальді максимум (локальді минимум) нүктесі деп атайды.

Егер (1) және (2) шарттарды

$$\forall x\in(x_0-\delta,\ \ \mathrm{x}_0+\delta),\ \ f(x)-f(x_0)<0, \tag{1′}$$

$$(\text{сәйкес } \forall x\in(x_0-\delta,\ \ \mathrm{x}_0+\delta),\ \ f(x)-f(x_0)>0), \tag{2′}$$

шарттарымен ауыстырсақ, онда x_0 – **локальді қатаң максимум** (сәйкес, **локальді қатаң минимум) нүктесі** деп аталады.

Анықтама. *Егер* x_0 *нүктесінде* $f(x)$ *функиясы үзіліссіз және* $f'(x_0)=0$ *немесе* $f'(x_0)$ *туындысы болмайтын болса, онда* x_0 *нүктесі* $f(x)$ *функциясының* ***кризистік*** *немесе* ***күдікті нүктесі*** *деп аталады.*

Теорема-1 (экстремумның жеткілікті шарты). $y=f(x)$ функциясы $[x_0-\delta,\ x_0+\delta]$ кесіндісінде үзіліссіз және $(x_0-\delta,\ x_0)$ мен $(x_0,\ x_0+\delta)$ аралықтарда дифференциалданатын болсын.

Егер $(x_0-\delta,\ \ x_0)$ мен $(x_0,\ \ x_0+\delta)$ аралықтарында $f'(x)$ туындысының таңбалары қарама–қарсы болса, онда x_0 экстремум нүктесі. Атап айтқанда:

а) егер $\forall x \in (x_0-\delta,\ \ x_0)$, $f'(x)>0$ ал $\forall x \in (x_0,\ \ x_0+\delta)$, $f'(x)<0$ болса, онда x_0 –локальді максимум;

б) егер $x \in (x_0-\delta, x_0)$, $f'(x)<0,$ ал $x \in (x_0, x_0+\delta),$ $f'(x)>0$ болса, онда x_0 – локальді минимум нүктесі;

в) $(x_0-\delta,\ \ x_0)$ және $(x_0,\ \ x_0+\delta)$ аралықтарында $f'(x)$ таңбасы бірдей болса, онда x_0 – нүктесінде локальді экстремум жоқ.

Теорема-2. $f(x)$ фунциясының x_0 нүктесінде **екінші туындысы бар** және $f'(x_0)=0$ болсын. Онда

1) егер $f''(x_0)>0$ болса, онда x_0–локальді минимум;

2) егер $f''(x_0)<0$ болса, онда x_0–локальді максимум;

3) егер $f''(x_0)=0$ болса, онда x_0–нүктесі экстремум нүктесі болуы да болмауы да мүмкін.

14 -Дәріс

<u>Тақырыбы</u>**: Функцияның ең үлкен және ең кіші мәндері. Функция графигінің ойыс, дөңес аралықтары. Иілу нүктелері.**

Функциялардың кесіндідегі ең үлкен және ең кіші мәндері

$[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз f функциясының ең үлкен (ең кіші) мәнін табу керек болсын. Оның қандай да бір $x_0 \in [a,b]$ нүктесінде болатыны белгілі.

Ендеше тек келесі үш жағдай болуы мүмкін:

1) $x_0=a$, 2) $x_0=b,$ 3) $x_0 \in (a,b,).$

Егер $x_0 \in (a,b)$ болса, онда x_0 – локальді экстремум нүктесі екені түсінікті.

Егер $x_1, x_2, ..., x_m$ - күдікті нүктелер, онда

$$\max_{x\in[a,b]} f(x)=\max\{f(a), f(b), f(x_1), \dots, f(x_m)\}$$

$$\min_{x\in[a,b]} f(x)=\min\{f(a), f(b), f(x_1), \dots, f(x_m)\}. \qquad (3)$$

Функцияның дөңестігі. Иілу нүктелері

$f(x)$ функциясы J – аралығында берілсін.

Анықтама. *Егер* $f(x)$ *– тің графигінің кез келген* $A_1(x_1, f(x_1))$ *және* $A_2(x_2, f(x_2))$ *екі нүктесінің арасындағы доға осы доғаны керетін хордадан жоғары жатпаса, онда* $f(x)$ *– функциясы* J *аралығында **дөңестігі төмен бағытталған,** қысқаша, **ойыс функция** деп аталады.*

Егер $g(x) = -f(x)$ функциясы J аралығында ойыс болса, онда $f(x)$ – функциясы J аралығында **дөңестігі жоғары бағытталған,** қысқаша **дөңес функция** деп аталады. Әрине $f(x)$ ойыс функция болса, онда $-f(x)$ дөңес болады.

Теорема-1. Егер $f(x)$ функциясының J аралығында туындысы бар болса, онда $f(x)$ **ойыс (дөңес)** функция болу үшін $f'(x)$ функциясы аралығында **кемімейтін (өспейтін)** функция болуы қажетті және жеткілікті.

$f(x)$ функциясының J аралығында екінші ретті туындысы бар болса, онда $f'(x)$ функциясы J аралығында кемімейтін (өспейтін) болуы $x \in J,\quad f''(x) \geq 0$ $\left(x \in \mathrm{I},\quad f''(x) \leq 0\right)$ шарттарымен пара-пар болғандықтан, келесі теоремаға келеміз.

Теорема-2. Егер J аралығында $f(x)$ функциясының екінші ретті туындысы бар болса, онда $f(x)$ **ойыс (дөңес) функция** болуы үшін әрбір $x \in J$ үшін $f''(x) \geq 0$ $\left(f''(x) \leq 0\right)$ теңсіздігі орындалуы қажетті және жеткілікті.

Ойыс (дөңес) функциялардың геометриялық сипаты келесі теоремадан көрінеді.

Теорема. $f(x)$ (a,b) - аралығында дифференциалданатын функция болса, онда $f(x)$ - **ойыс (дөңес) функция** болуы үшін, оның графигі өзінің әрбір жанамасынан **төмен (жоғары) жатпауы** қажетті және жеткілікті.

Анықтама. $f(x)$ *функциясы* (a,b) *аралығында анықталған және үзіліссіз болсын. Егер* $x_0 \in (a,b)$ *нүктесінің белгілі бір оң және сол жақты маңайларында* $f(x)$ *функциясының дөңестігі қарама-қарсы бағытталған болса, онда* $\left(x_0, f(x_0)\right)$ *нүктесі* $f(x)$ *- тің графигінің* ***иілу нүктесі*** *деп аталады.*

Теорема-3 (иілу нүктесінің қажетті шарты). (a,b) аралығында $f(x)$ дифференциалданатын, ал x_0 - нүктесінде екінші ретті туындысы $f''(x_0)$ бар функция болсын. Егер $\left(x_0, f(x_0)\right)$ иілу нүктесі болса, онда $f''(x_0) = 0$.

Теорема-4 (иілу нүктесінің жеткілікті шарты). Егер $f(x)$ функциясы x_0 нүктесінің белгілі бір δ - маңайында үзіліссіз болып, $\left(x_0 - \delta, x_0\right)$ аралығында туындысы бар және ол кемімейтін (өспейтін), $\left(x_0, x_0 + \delta\right)$ аралығында туындысы бар және ол өспейтін (кемімейтін) болса, онда $\left(x_0, f(x_0)\right)$ - иілу нүктесі.

Басқаша айтқанда, (x - өсу бағытында) x_0 - нүктесінен өткенде $f''(x)$ - екінші ретті туындының таңбасы өзгерсе, онда $\left(x_0, f(x_0)\right)$- иілу нүктесі болады.

Сонымен, функцияның иілу нүктелерін тек қана $f''(x_0) = 0$ орындалатын немесе $f''(x)$ - болмайтын нүктелердің (ондай нүктелерді **функцияның екінші ретті күдікті нүктелері** деп те атайды) ішінен іздеу керек.

15 -Дәріс

<u>Тақырыбы</u>: Асимптоталар. Функцияны туынды көмегімен толық зерттеу және графигін құру.

Функция графигінің асимптоталары

Анықтама. *Егер* $y = f(x)$ *функциясының графигіндегі* $M(x, f(x))$ *нүктесі координата бас нүктесінен шексіз алшақтағанда осы* M *нүктесінен* $y = kx + b$ *түзуіне дейінгі қашықтық нөлге ұмтылса,* $y = kx + b$ *түзуі* $f(x)$ *- тің графигінің* ***асимптотасы*** *деп аталады.*

Мұнда екі жағдай болуы мүмкін:

1) $M(x, f(x))$ нүктесінің абциссасы x ақырлы a санына ұмтылады. Онда $x = a, \quad y > 0$ немесе $x = a, \quad y < 0$ жартылай түзуі **вертикаль асимптота** болады;

2) $M(x, f(x))$ нүктесінің абциссасы $x \to +\infty$ немесе $x \to -\infty$ ұмтылады. Онда $y = kx + b$ **көлбеу асимптота** деп аталады.

Теорема-1 (вертикаль асимптота туралы). $x = a$ түзуі вертикаль асимптота болуы үшін

$$\lim_{x \to a+0} f(x) \text{ немесе } \lim_{x \to a-0} f(x)$$

шектерінің ең болмағанда біреуі шексіз үлкен болуы қажетті және жеткілікті.

Ескерту. Вертикаль асимптотаны анықтайтын $x = a$ саны функциясының үзіліс (екінші ретті) нүктелерінің ішінде.

Егер $y = f(x)$ - үзіліссіз функция болса, онда вертикаль асимптота жоқ.

Теорема-2 (көлбеу асимптота туралы). $y = kx + b$ түзуі $y = f(x)$ функциясының көлбеу асимптотасы болуы үшін

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \text{ және } b = \lim_{x \to \infty} \left[f(x) - kx \right] \tag{4}$$

шектерінің бар болуы қажетті және жеткілікті.

(мұнда $x \to +\infty$ ұмтылғандағы шек **оң жақ көлбеу асимптота,** ал $x \to -\infty$ ұмтылғандағы шек **сол жақ көлбеу асимптота** үшін қарастырылады)

Функцияны зерттеу схемасы және оның графигін салу

Функцияны зерттеп, оның графигін салу жұмысын келесі ретпен жүргізуді ұсынуға болады.

1. Функцияның анықталу аймағын анықтау. Оны жұп, тақ, периодтылықты зерттеу. Графиктің координата өстерімен қиылысу нүктелерін табу;
2. Функцияны үзіліссіздікке зерттеу.
3. Функцияның асимптоталарын табу.
4. Өсу, кему аралықтарын, экстремумдерді табу.
5. Ойыс, дөңес аралықтарын, иілу нүктелерін табу.
6. Табылған үзіліс нүктелерін, күдікті нүктелерді олардың арасындағы аралықтарды (интервалдарды) көрсетіп кесте (таблица) салу. Әрбір аралықта функцияның сипаты көрсетіледі.

Қажет болған жағдайда (дәлірек график үшін) функцияның аралық мәндерін таба отырып функция графигінің эскизін салу